

*Lösen von Gleichungen
Teil 2*

Berechnung von Polynom-Nullstellen

Die Lösung der „einfachen“ Gleichungen $z^n = a$
wird in den Texten 50013, 50014 und 50015 gezeigt.

Datei Nr. 50021

Stand 13. November 2023

FRIEDRICH W. BUCKEL

**INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK
UND STUDIUM**

<https://mathe-cd.de>

Inhalt von 50021

1	Quadratische Gleichungen	4		
1.1	mit reellen Koeffizienten	4		
(1)	$x^2 + 4x + 5 = 0$	(2) $3x^2 - 2x + 1 = 0$	(3) $3x^2 - 2x + 1 = 0$	
1.2	mit komplexen Koeffizienten und reellem aber negativen Radikanden			
(4)	$z^2 - i \cdot 3z + 4 = 0$	(5) $z^2 - 10i \cdot z - 29 = 0$	(6) $z^2 - 10i \cdot z - 29 = 0$	
(6)	$iz^2 + 6z - 25i = 0$	(7) $\frac{1}{2}i \cdot z^2 - 9z - 41 \cdot i = 0$	(8) $4z^2 - 4\bar{z} + 1 = 0$	
1.3	mit komplexen Koeffizienten und nicht-reellem Radikanden			7
(9)	$z^2 + 2z + \frac{3}{4}i = 0$	(10) $z^2 - i\sqrt{5} \cdot z - 3i = 0$		
Allgemein Lösung von $az^2 + bz + c = 0$ mit komplexer Wurzel				9
Beispiele zur Lösungsformel (9), (10) und (11) $z^2 + 2z - 3 = 0$				10
(12)	$i \cdot z^2 + 3z - 2 = 0$	Ausführliche Lösung und Kurzlösung		11
(13)	$z^2 + (2 - i) \cdot z - 2i = 0$			12
1.4	Spezielle Quadratische Gleichungen	(14) $z^2 + i \cdot 2z - (1+i) = 0$ und		
(15)	$z^2 + (2+2i) \cdot z + 3i = 0$	(15) $(1+2i) \cdot z^2 - (3-i) \cdot z = 0$		13
Aufgabe 1 (Lösungen auf Seite 27)				13
a)	$z^2 - 6z + 12 = 0$	b) $z^2 - 5z + \frac{125}{4} = 0$		
c)	$z^2 - iz + 12 = 0$	d) $iz^2 + 4z - 4i = 0$		
e)	$z^2 + (2+i \cdot 4)z + (-3-i \cdot 3) = 0$	f) $z^2 + (4+i \cdot 2)z + (4+i \cdot 4) = 0$		
g)	$z^2 - i \cdot 4z - (4+i) = 0$	h) $i \cdot z^2 + (4-2i)z - (4+3i) = 0$		
i)	$z^2 + 2iz - k = 0$	Für welches $k \neq 0$ hat die Gleichung nur imaginäre Lösungen?		
j)	$6iz^2 - 5(1+2i)z + 17 = 0$			
2	Biquadratische Gleichungen			14/17
(20)	$z^4 + (1+i) \cdot z^2 + i = 0$	(21) $z^4 - 4z^2 + 16 = 0$		
(22)	$z^4 + (2i+2)z^2 + 4i = 0$			16 und 17
Aufgabe 2 (Lösungen auf Seite 28)				15
a)	$z^4 + (1-i)z^2 - i = 0$	b) $z^4 + 2z^2 + 2 = 0$	c) $z^4 + 13z^2 + 36 = 0$	
d)	$z^4 + i \cdot 13z^2 - 36 = 0$	e) $z^4 - iz^2 + 2 = 0$	f) $z^4 + 6z^2 + 25 = 0$	

3 Gleichungen 3. bis 5. Grades

(30)	$z^3 - 6z^2 + 28z - 40 = 0$	18
(31)	$z^3 - (7+i)z^2 + (12+7i)z - 12i = 0$	18
(32)	$z^4 - 8z^3 + 24z^2 - 32z + 15 = 0$	19
(33)	$z^4 - 6z^3 + 15z^2 - 18z + 10 = 0$	20
(34)	$z^5 - 5z^4 + 13z^3 - 7z^2 - 8z + 18 = 0$	21

Aufgabe 3 mit Lösungen (S. 30 ff)

- | | | |
|----|--|--|
| a) | $z^3 - 4z^2 + 13z + 50 = 0$ | hat eine ganzzahlige reelle Lösung. |
| b) | $z^3 - (7+2i)z^2 + (28+10i)z - (8+56i) = 0$ | Zeige: $z_1 = 2i$ ist eine Lösung. |
| c) | $z^4 - 10z^3 + 66z^2 - 226z + 377 = 0$ | Zeige: $z_1 = 3 - 2i$ ist eine Lösung. |
| d) | $z^4 - 2\sqrt{2}z^3 + 4z^2 - 2\sqrt{2}z + 3 = 0$ | Zeige: $z_1 = -i$ ist eine Lösung. |
| e) | $z^4 - 8z^3 + 24z^2 - 32z + 15 = 0$ | Zeige: $z_1 = 2+i$ ist eine Lösung. |
| f) | $f(z) = z^3 - 4iz^2 + (i-6)z + (3i+1)$ | Zeige, dass i eine Nullstelle von f ist. |

4 Fundamentalsatz der Algebra 22

(40)	$x^2 + x - 6 = 0$	(41)	$4x^2 + 4x - 3 = 0$	22
(42)	$x^2 + 2x + 2 = 0$			22
(43)	$z^5 - 5z^4 + 13z^3 - 7z^2 - 8z + 18 = 0$			23
(44)	$z^3 - z^2 + 4z - 4 = 0$	(45)	$z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 5 = 0$	24
(46)	$z^5 - iz^3 + 8z^2 - 8i = 0$			25

Übersicht zu den Aufgaben 1 bis 3 26

Lösungen der Aufgaben 1 bis 3 27-32

3 Gleichungen 3. bis 5. Grades

- (30) Zeige, dass $z = 2$ eine Lösung der Gleichung $z^3 - 6z^2 + 28z - 40 = 0$ ist.
Bestimme die restlichen Lösungen.

Zuerst macht man die Probe für $z = 2$:

$$2^3 - 6 \cdot 2^2 + 28 \cdot 2 - 40 = 8 - 24 + 56 - 40 = 64 - 64 = 0$$

Damit weiß man, dass man den Linearfaktor $(z-2)$ abspalten kann.

Dies geht entweder mit

Polynomdivision:

$$\begin{array}{r} (z^3 - 6z^2 + 28z - 40) : (z - 2) = z^2 - 4z + 20 \\ -(z^3 - 2z^2) \\ \hline -4z^2 + 28z \\ -(-4z^2 + 8z) \\ \hline 20z - 40 \\ -(20z - 40) \\ \hline 0 \end{array}$$

oder mit dem

Horner Schema:

$$\begin{array}{r} 1 & -6 & 28 & -40 \\ z = 2 & \boxed{0} & -2 & -8 & 40 \\ & & -4 & 20 & \boxed{0} \end{array}$$

Erg.: $1 \cdot z^2 - 4 \cdot z + 20$

Die 0 in der dritten Zeile beweist, dass $z = 2$ eine Lösung der Gleichung ist. Wer also mit dem Horner Schema rechnet, benötigt obige Probe nicht.

Ergebnis: $z^3 - 6z^2 + 28z - 40 = (z^2 - 4z + 20)(z - 2) = 0$

Man muss also nur noch die quadratische Gleichung $z^2 - 4z + 20 = 0$ lösen.

$$z_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 80}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-64}}{2} = \frac{4 \pm 8i}{2} = 2 \pm 4i$$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{2; 2 + 4i; 2 - 4i\}$

- (46) Bestimme alle Lösungen von $z^5 - iz^3 + 8z^2 - 8i = 0$,
wenn man weiß, dass $z_1 = \sqrt{i}$ Lösung der Gleichung ist.

Lösung:

Vermutung: Mit $z_1 = \sqrt{i}$ ist auch $z_2 = -\sqrt{i}$ eine Lösung.

Das beweist man, indem man durch $(z^2 - i)$ dividiert:

Ergebnis: $z^5 - iz^3 + 8z^2 - 8i = (z^2 - i)(z^3 + 8)$

$$\begin{array}{r} (z^5 - iz^3 + 8z^2 - 8i) : (z^2 - i) = z^3 + 8 \\ - (z^5 - iz^3) \\ \hline 0 + 8z^2 - 8i \\ - (8z^2 - 8i) \\ \hline 0 \end{array}$$

Weil die Division ohne Rest aufgeht, sind $z_{1,2} = \pm\sqrt{i}$ Lösungen.

- (1) Normalform von $z_{1,2} = \pm\sqrt{i}$.

Es sei $a = i$.

Betrag: $|i| = 1$,

Argument: $\alpha = 90^\circ$

Polardarstellung:

Lösungsansatz: $z = r \cdot E(\varphi)$

Vergleichen:

$$\begin{aligned} a = i &= 1 \cdot E(90^\circ + k \cdot 360^\circ) \\ z^2 &= r^2 \cdot E(2\varphi) \\ r^2 &= 1 \Rightarrow r = 1 \\ 2\varphi &= 90^\circ + k \cdot 360^\circ \\ \varphi &= 45^\circ + k \cdot 180^\circ \end{aligned}$$

Lösungsformel:

$$z_k = E\left(45^\circ + k \cdot 180^\circ\right) \quad \text{für } k = 0 \text{ oder } 1.$$

Also:

$$z_0 = E(45^\circ) = \cos(45^\circ) + i \cdot \sin(45^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{2} + i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$z_1 = -z_0 = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

- (2) Lösungen von $z^3 + 8 = 0$, also von $z^3 = -8$.

Polardarstellung von $a = -8$:

Lösungsansatz $z = r \cdot E(\varphi)$

Vergleichen ergibt:

und

$$\begin{aligned} a = -8 &= 8 \cdot E(180^\circ + k \cdot 360^\circ) \\ z^3 &= r^3 \cdot E(3\varphi) \\ r^3 &= 8 \Rightarrow r = \sqrt[3]{8} = 2 \\ 3\varphi &= 180^\circ + k \cdot 360^\circ \\ \varphi_k &= \frac{180^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} = 60^\circ + k \cdot 120^\circ \quad (k = 0, 1, 2) \end{aligned}$$

Lösungsformel:

$$z_k = 2 \cdot \left(\cos(60^\circ + k \cdot 120^\circ) + i \cdot \sin(60^\circ + k \cdot 120^\circ) \right) \quad (k = 0, 1, 2)$$

Lösungen:

$$z_0 = 2 \cdot \left(\cos(60^\circ) + i \cdot \sin(60^\circ) \right) = \frac{1}{2} + i\sqrt{3}$$

$$z_1 = 2 \cdot \left(\cos(180^\circ) + i \cdot \sin(180^\circ) \right) = 2 \cdot (-1 + i \cdot 0) = -2$$

$$z_2 = 2 \cdot \left(\cos(300^\circ) + i \cdot \sin(300^\circ) \right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \right) = 1 - i\sqrt{3}$$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \left\{ \frac{1}{2}\sqrt{2} + i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2} - i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2} + i\sqrt{3}, -2, 1 - i\sqrt{3} \right\}$

Aufgaben Übersicht

Bestimme die Lösungsmengen

Aufgabe 1

a) $z^2 - 6z + 12 = 0$

b) $z^2 - 5z + \frac{125}{4} = 0$

c) $z^2 - iz + 12 = 0$

d) $iz^2 + 4z - 4i = 0$

e) $z^2 + (2+i \cdot 4)z + (-3+i \cdot 3) = 0$

f) $z^2 + (4+i \cdot 2)z + (4+i \cdot 4) = 0$

g) $z^2 - i \cdot 4z - (4+i) = 0$

h) $i \cdot z^2 + (4-2i)z - (4+3i) = 0$

i) $z^2 + 2iz - k = 0$

Nur imag. Lsg!

j) $6iz^2 - 5(1+2i)z + 17 = 0$

Aufgabe 2

a) $z^4 + (1-i)z^2 - i = 0$

b) $z^4 + 2z^2 + 2 = 0$

c) $z^4 + 13z^2 + 36 = 0$

d) $z^4 + 13z^2 - 36 = 0$

Aufgabe 3

a) $z^3 - 4z^2 + 13z + 50 = 0$

hat eine ganzzahlige reelle Lösung.

b) $z^3 - (7+2i)z^2 + (28+10i)z - (8+56i) = 0$

Zeige: $z_1 = 2i$ ist eine Lösung.

c) $z^4 - 10z^3 + 66z^2 - 226z + 377 = 0$

Zeige: $z_1 = 3 - 2i$ ist eine Lösung.

d) $z^4 - 2\sqrt{2}z^3 + 4z^2 - 2\sqrt{2}z + 3 = 0$

Zeige: $z_1 = -i$ ist eine Lösung.

e) $z^4 - 8z^3 + 24z^2 - 32z + 15 = 0$

Zeige: $z_1 = 2 - i$ ist eine Lösung.

Lösungen Aufgabe 1

auf CD.

Demo-Text für www.mathe-cd.de